

Własności modeli neuronowych

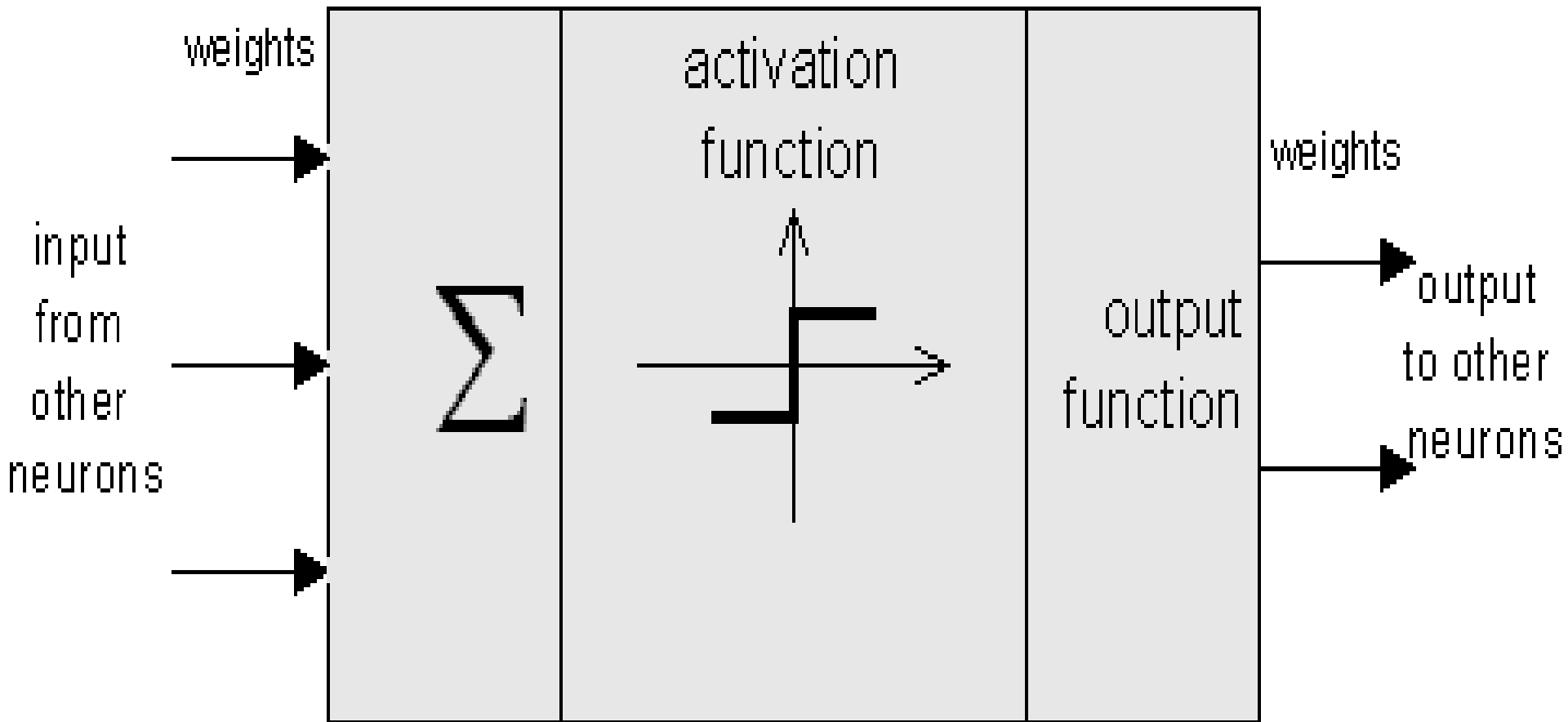
Modele neuronowe to:

- podklasa modeli adaptacyjnych (ang. *adaptive systems*);
- podklasa modeli PDP opartych na przetwarzaniu rozproszonym (współbieżnym).

Sposób uczenia:

- Uczenie „nadzorowane” (*supervised*) skojarzeń par struktur wejściowych i wyjściowych.
- Uczenie się bez nadzoru (*unsupervised learning*), do wykrywania reakcji na „interesujące” sygnały, uczenie indukcyjne – uogólnianie przykładów.
- Uczenie z krytykiem lub wzmocnieniem (*reinforcement learning*), strategii postępowania na podstawie krytyki po dłuższym okresie czasu, uczenie się celowego zachowania na podstawie interakcji ze środowiskiem.

Przykład pojedynczego neuronu



Separowalność

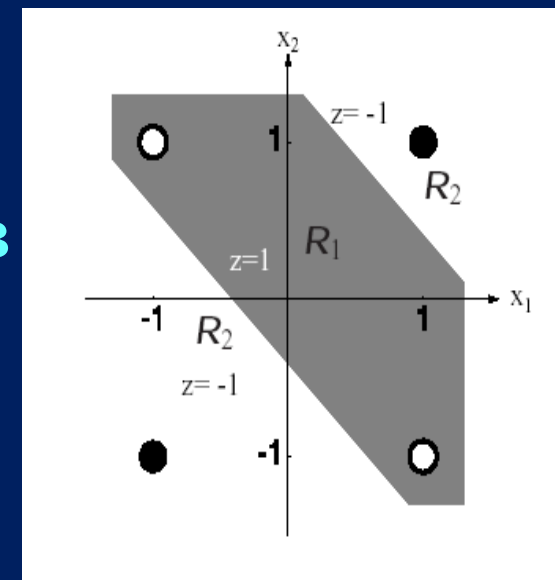
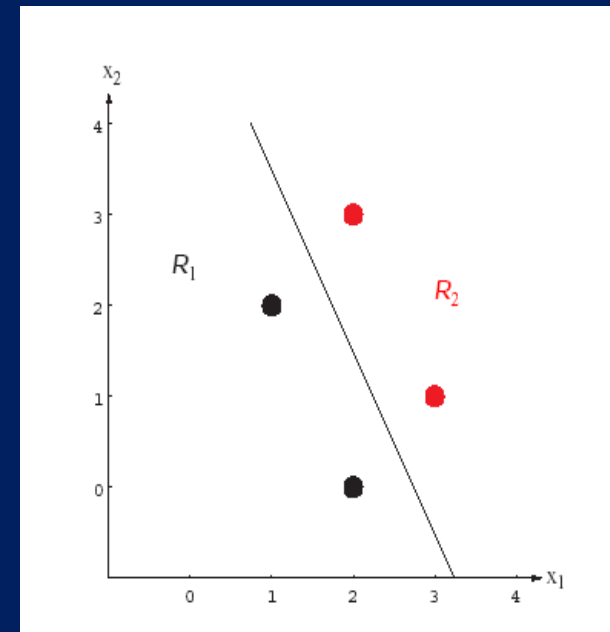
Pojedynczy neuron realizuje tylko funkcje liniowo separowalne, tzn. wartości $f(x)=T$ można oddzielić od $f(x)=F$ za pomocą płaszczyzny.

Np: funkcja $f(A,B) = A.OR.B$ jest separowalna.
Za to funkcja $f(A,B) = A.XOR.B$ nie jest liniowo separowalna.

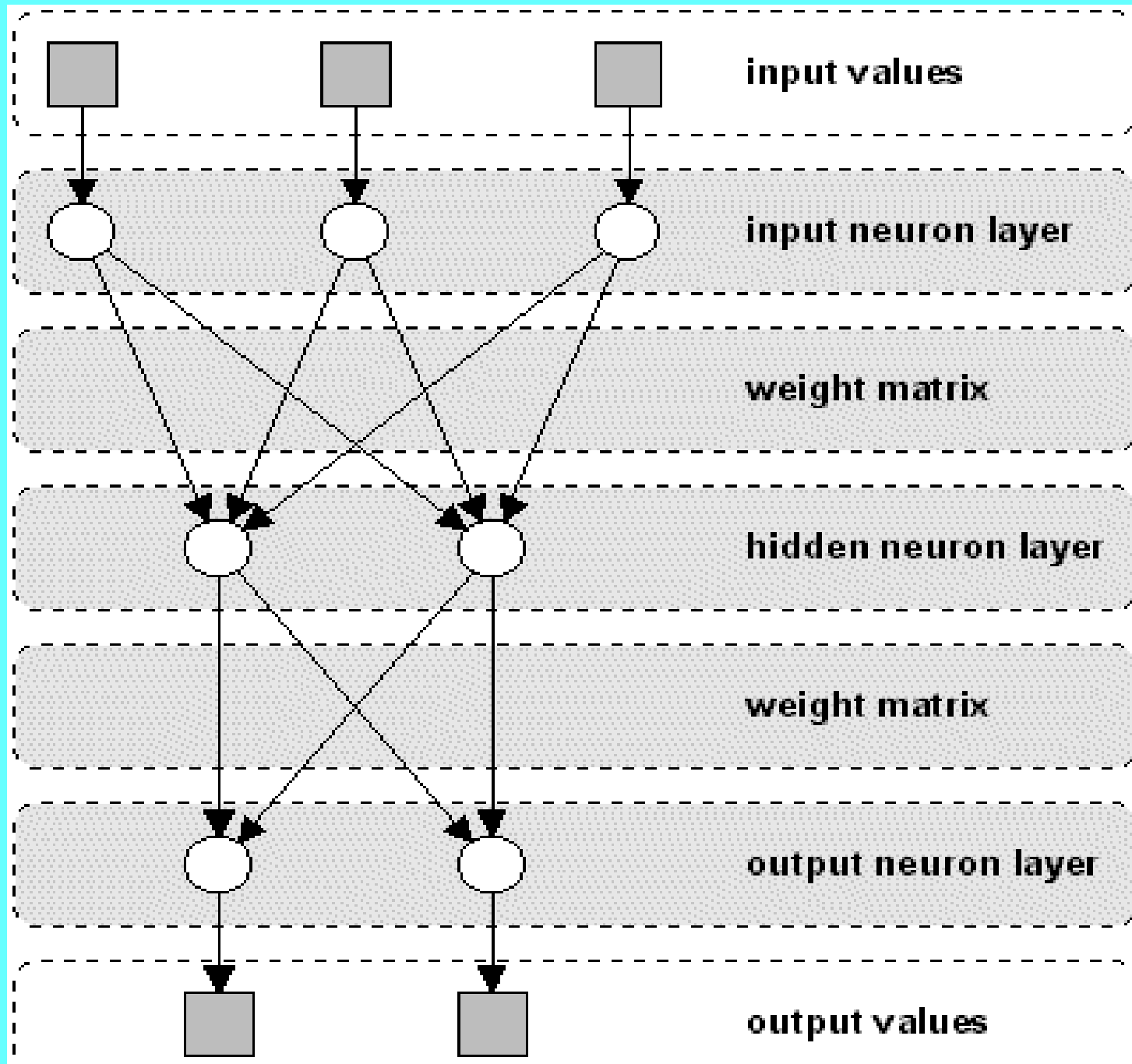
Dodatkowe synapsy hamujące pozwalają na realizację dowolnej funkcji.

Np. wejścia hamujące $A'=B$ i $B'=A$ i pobudzające A, B pozwalają na realizację funkcji XOR.

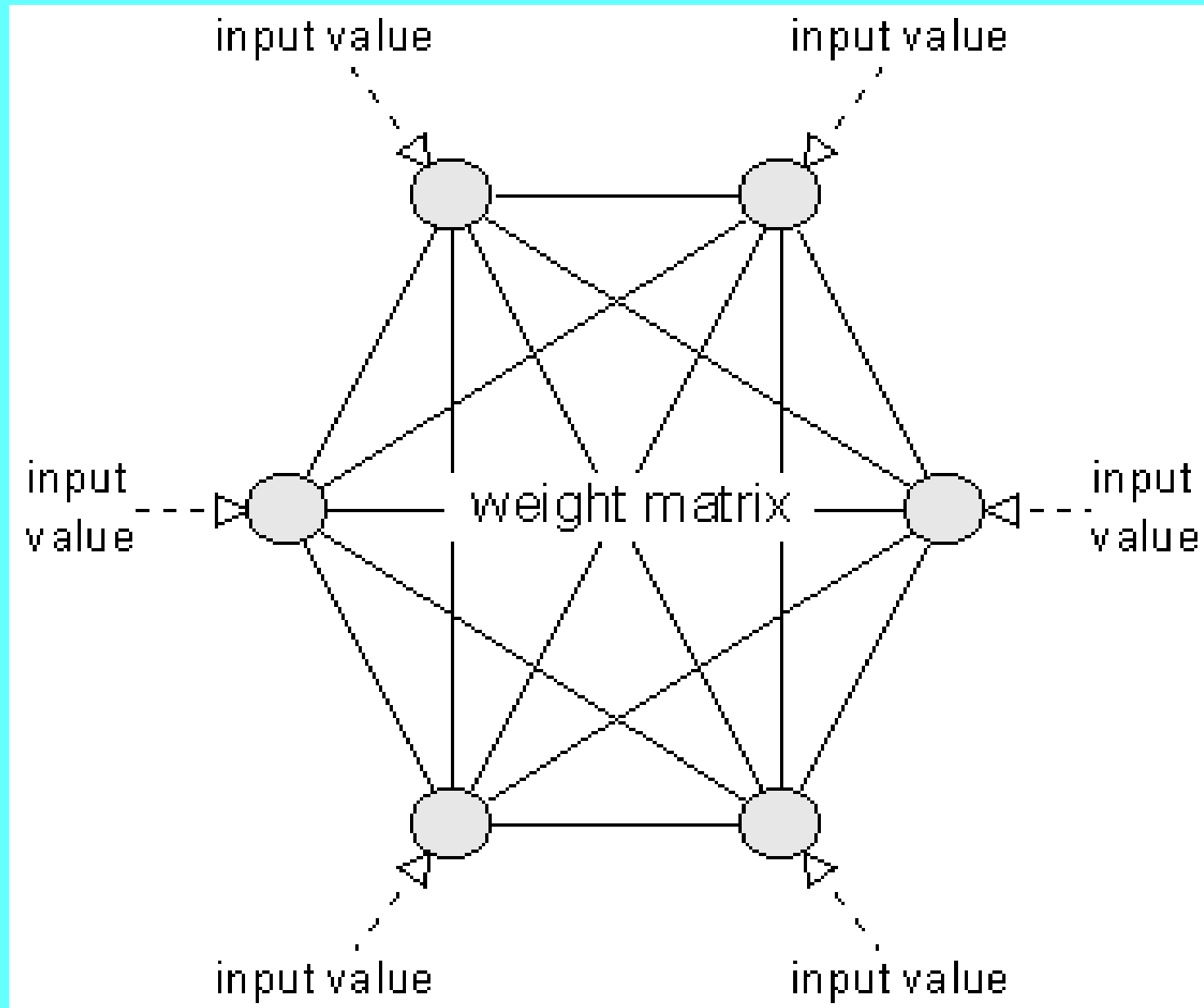
Mechanizm hamowania presynaptycznego został odkryty przez Johna Ecclesa dopiero po pracach teoretycznych!



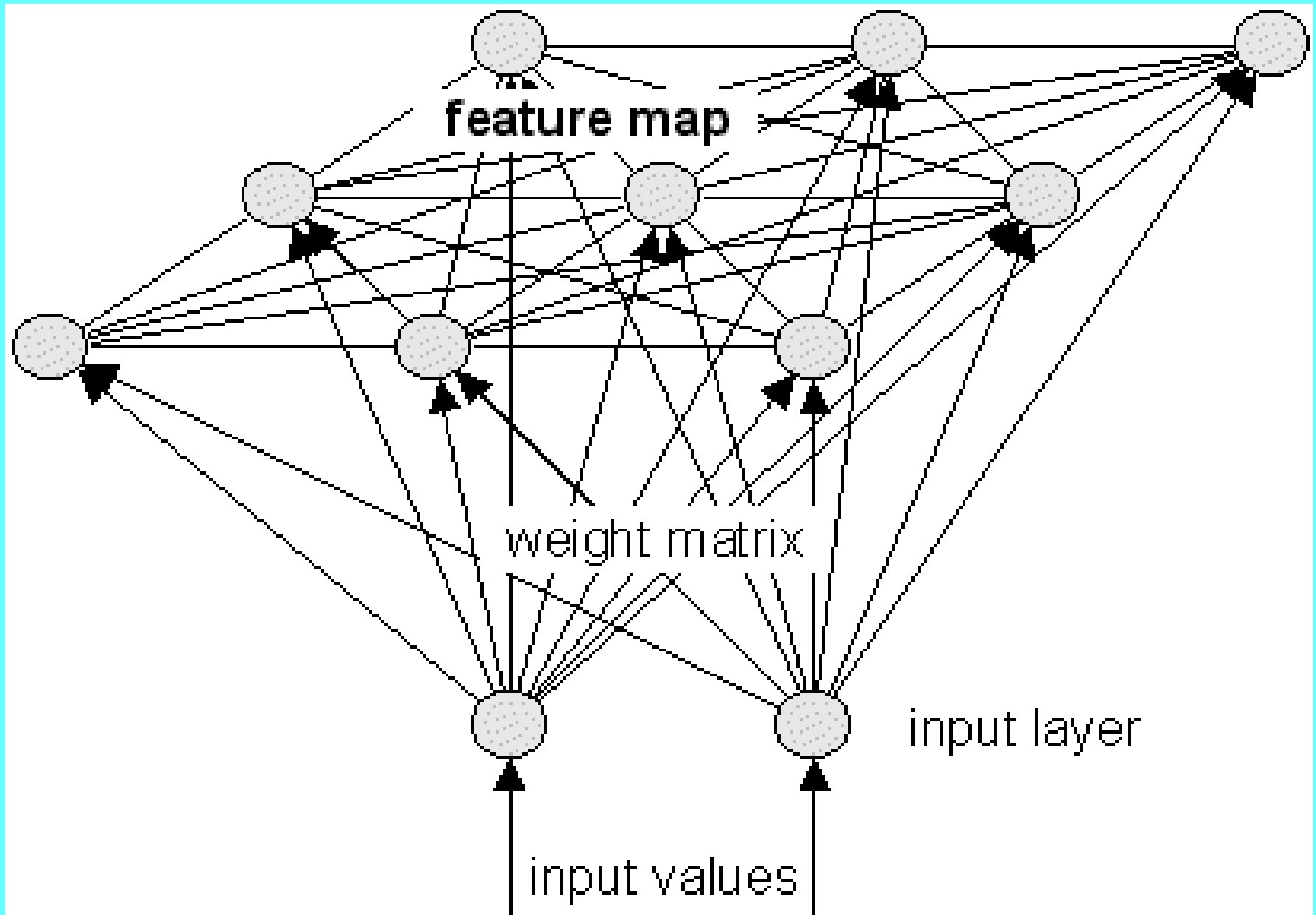
Sieć z trzema warstwami neuronów



Sieć Hopfielda



Mapa cech Kohonena



Obszary zastosowań

- kojarzenie wzorców
- klasyfikacja wzorców
- wykrywanie regularności, trendów
- przetwarzanie wzorców
- rozpoznanie mowy
- optymalizacja
- sterowanie robotami
- przetwarzanie niedokładnej i niekompletnej informacji
- zapewnienie jakości
- prognoza giełdowa
- symulacje

Ograniczenia ANN

- **Problemy z symulacją współbieżności w ANN**
- **Niewyjaśniony brak stabilności w pewnych sytuacjach**

Wyznaczanie wag – trening z nauczycielem

Empiryczny błąd systemu (ryzyko empiryczne, błąd uczenia):

$$E_{emp}(\mathbf{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - d_i)^2 \stackrel{\text{min}}{=} \sum_{i=1}^n [f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}) - d_i]^2$$

Zastosowano n par uczących (\mathbf{x}_i, d_i)

Dla wejścia do sieci \mathbf{x}_i powinna być wyliczona przez sieć odpowiedź d_i , ale jest y_i .

\mathbf{x}_i, d_i, y_i są wektorami

Aby odpowiedzi systemu \mathbf{y} były prawidłowe (równe d), minimalizuje się wartość funkcji $E(\mathbf{w})$, gdzie zmiennymi decyzyjnymi są \mathbf{x}

Metody gradientowe minimalizacji $E(\mathbf{w})$

Metoda najszybszego spadku

1. Losowy wybór punktu startowego \mathbf{w}
2. Obliczenie gradientu funkcji $E(\mathbf{w})$ w punkcie \mathbf{w}

$$\nabla E(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial w_1} \\ \frac{\partial E}{\partial w_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial w_n} \end{bmatrix}$$

3. Wyznaczenie nowego punktu \mathbf{w}'

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \eta \nabla E(\mathbf{w})$$

η - arbitralnie wybrana stała (współczynnik korekcji)

4. Sprawdzenie warunku stopu (numer kroku lub wartość funkcji $E(\mathbf{w})$). Jeżeli warunek nie jest spełniony to skok do kroku 2.

Metody gradientowe minimalizacji $E(w)$

1. Do metod gradientowych należą także:

- a) metoda propagacji wstecznej błędu uczenia ANN
- b) metoda doboru funkcji przynależności systemu wnioskowania rozmytego

Gdy nie jest znany wzór funkcji, a funkcja dana jest przez wartości, to można zastosować przybliżenie:

$$\nabla E(w) \approx \frac{1}{h} \begin{bmatrix} E(w + he_1) - E(w) \\ E(w + he_2) - E(w) \\ \vdots \\ E(w + he_n) - E(w) \end{bmatrix}$$

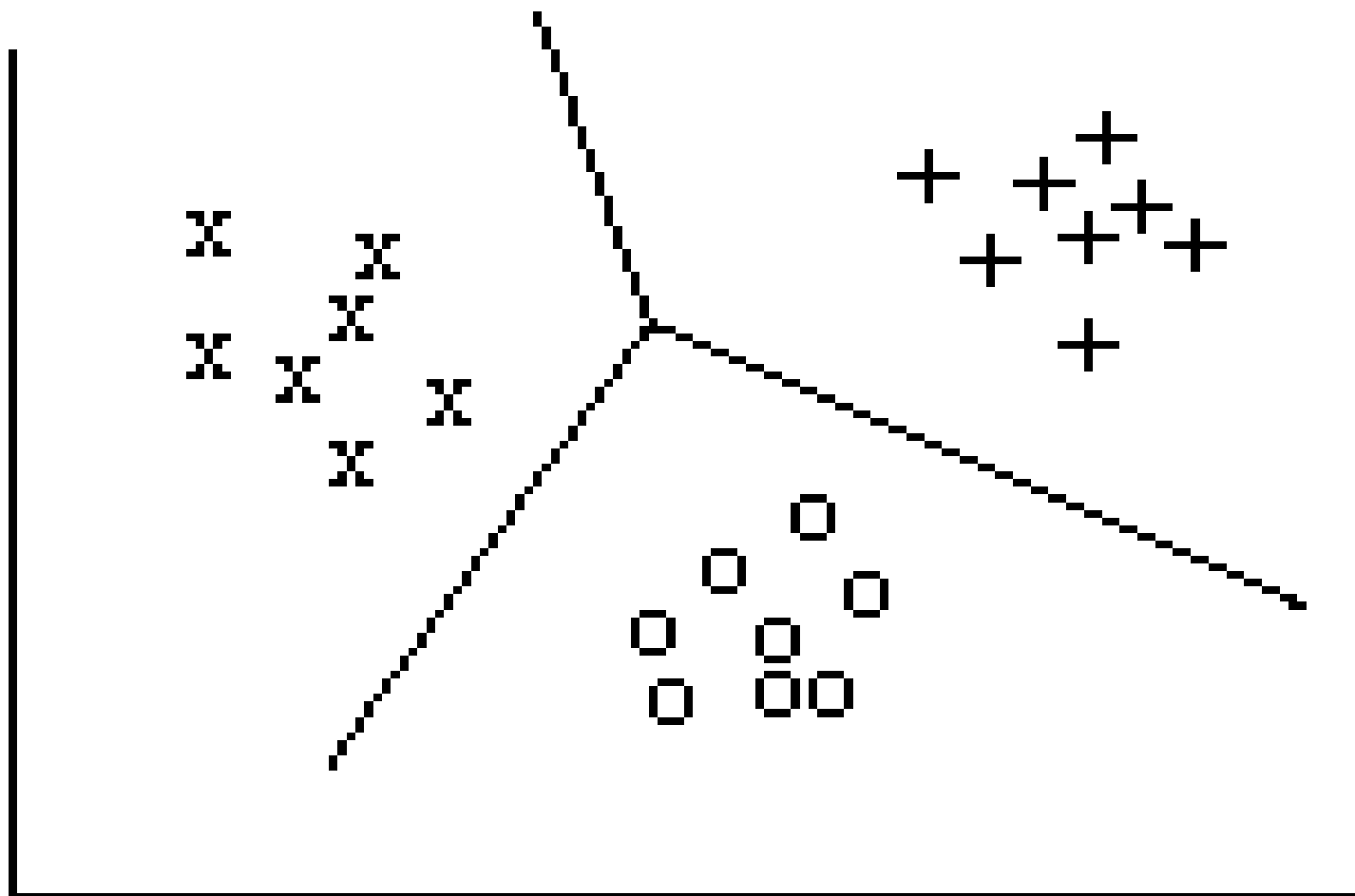
gdzie **h** jest arbitralnie wybraną niewielką liczbą,

e_i , $i = 1, 2, \dots, n$ oznacza wektor jednostkowy w kierunku **i**.

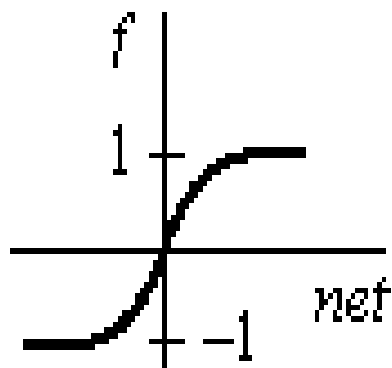
Metody gradientowe mogą zatrzymywać się w ekstremach lokalnych.

Perceptron jako klasyfikator dla M klas

Granice decyzji perceptronu dla 3 klas.

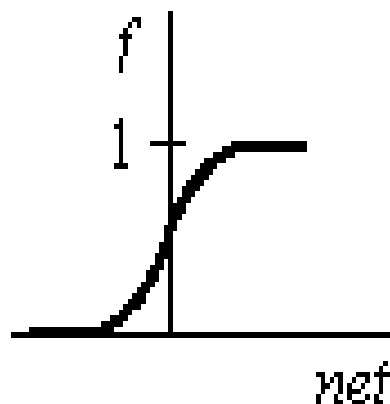


Sigmoidalne funkcje aktywacji



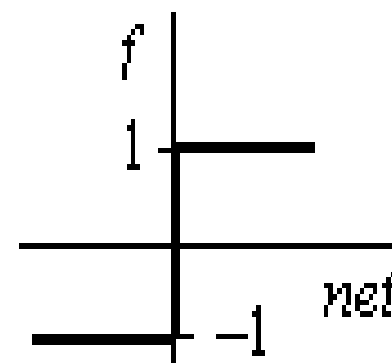
$$f = \tanh(c \cdot net)$$

tanh



$$f = \frac{1}{1 + \exp(-c \cdot net)}$$

logistic



$$f = \begin{cases} 1 & net > 0 \\ -1 & net < 0 \end{cases}$$

threshold

Bipolarne i unipolarne funkcje sigmoidalne.

Levenberg-Marquardt

Korzystamy z Jakobianu, który dla funkcji kwadratowej:

$$J_{ij} = \left[\frac{\partial E(X)}{\partial W_{ij}} \right]; \quad \Delta E(X) = \mathbf{J}^T E(X)$$

Jakobian można policzyć korzystając z wstecznej propagacji.
Przybliżenie do Hesjanu:

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^T \mathbf{J}$$

Parametry obliczamy korzystając z:

$$W_{k+1} = W_k - \left(\mathbf{J}^T \mathbf{J} - \mu \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{J}^T E(X)$$

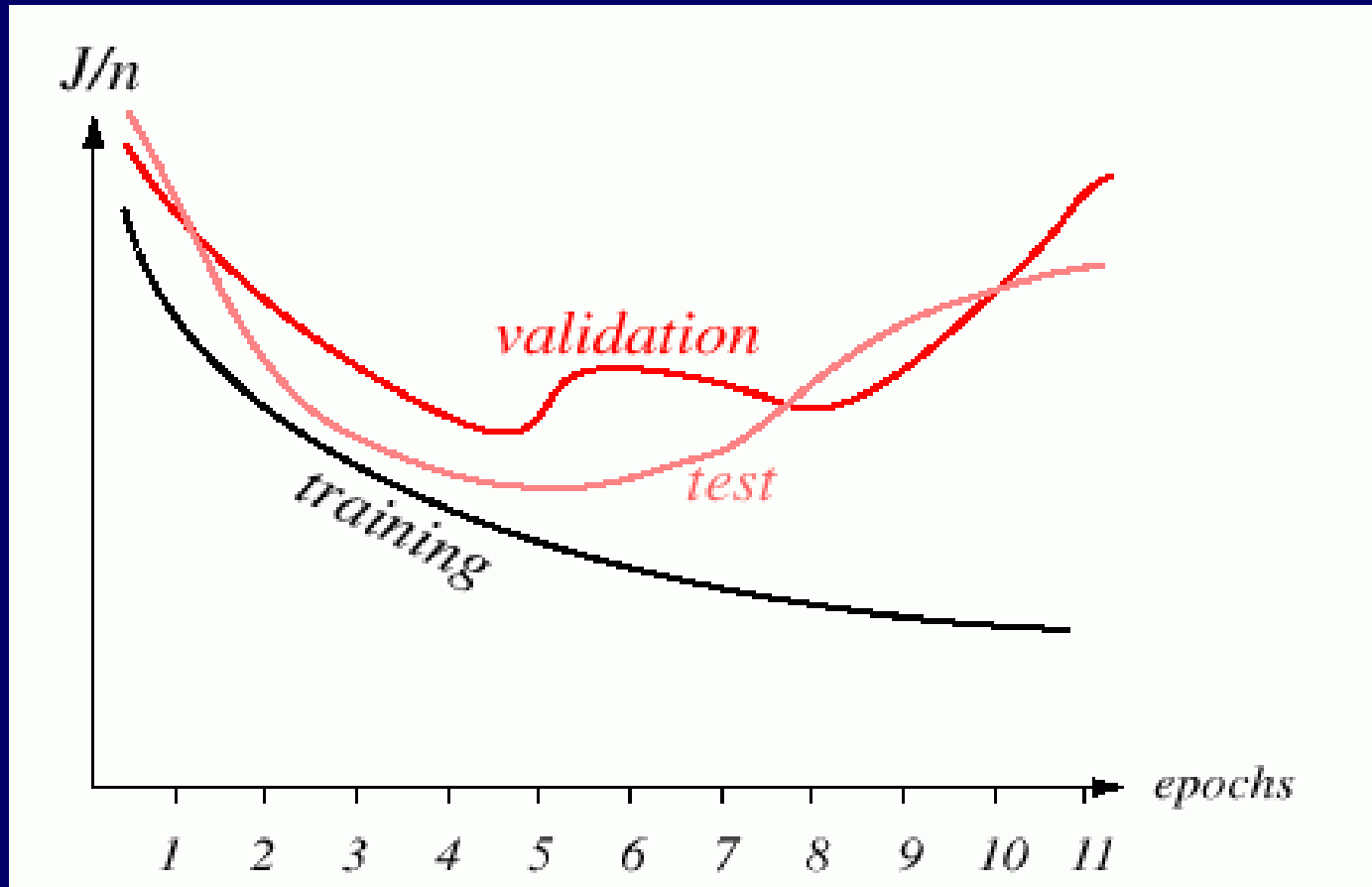
Dla $\mu = 0$ mamy metodę Newtona, a dla dużego największego spadku z małym krokiem; LM używa metod Newtona w pobliżu minimum, zmniejszając μ .

Generalizacja

Wyniki na **zbiorze treningowym** mogą osiągnąć 100%

Celem jest osiągnięcie najlepszego wyniku dla nowych przypadków, nie pokazywanych wcześniej sieci.

Zbiór walidacyjny: pozwala na ocenę błędu generalizacji; oczekujemy korelacji wyników na zbiorze walidacyjnym i testowym.



Strategia minimaxu

Teoria gier: John von Neumann, Morgenstern 1944

Twr.

Dla każdej *dwuosobowej gry o sumie zerowej* istnieje wartość V i *mieszana strategia* dla każdego gracza, takie, że:

- (a) biorąc pod uwagę strategię gracza drugiego, najlepszą możliwą spłatą dla gracza pierwszego jest V ,
- (b) biorąc pod uwagę strategię gracza pierwszego, najlepszą możliwą spłatą dla gracza drugiego jest $-V$.

Strategia minimaxu

Oponenci w grze: **Min** i **Max** – **zaczynający**.

1. Utwórz drzewo dla gry do maksymalnej głębokości, na ile starczy czasu.
2. Oceń wartości funkcji heurystycznej poczynając od liści.
3. Cofnij się o jeden poziom i dokonaj ocen znajdujących się tam węzłów.
4. Po osiągnięciu korzenia wybierz decyzję maksymalizującą zyski.

Decyzja min-maks: dla skończonych drzew kompletna, dla racjonalnych oponentów najlepsza.

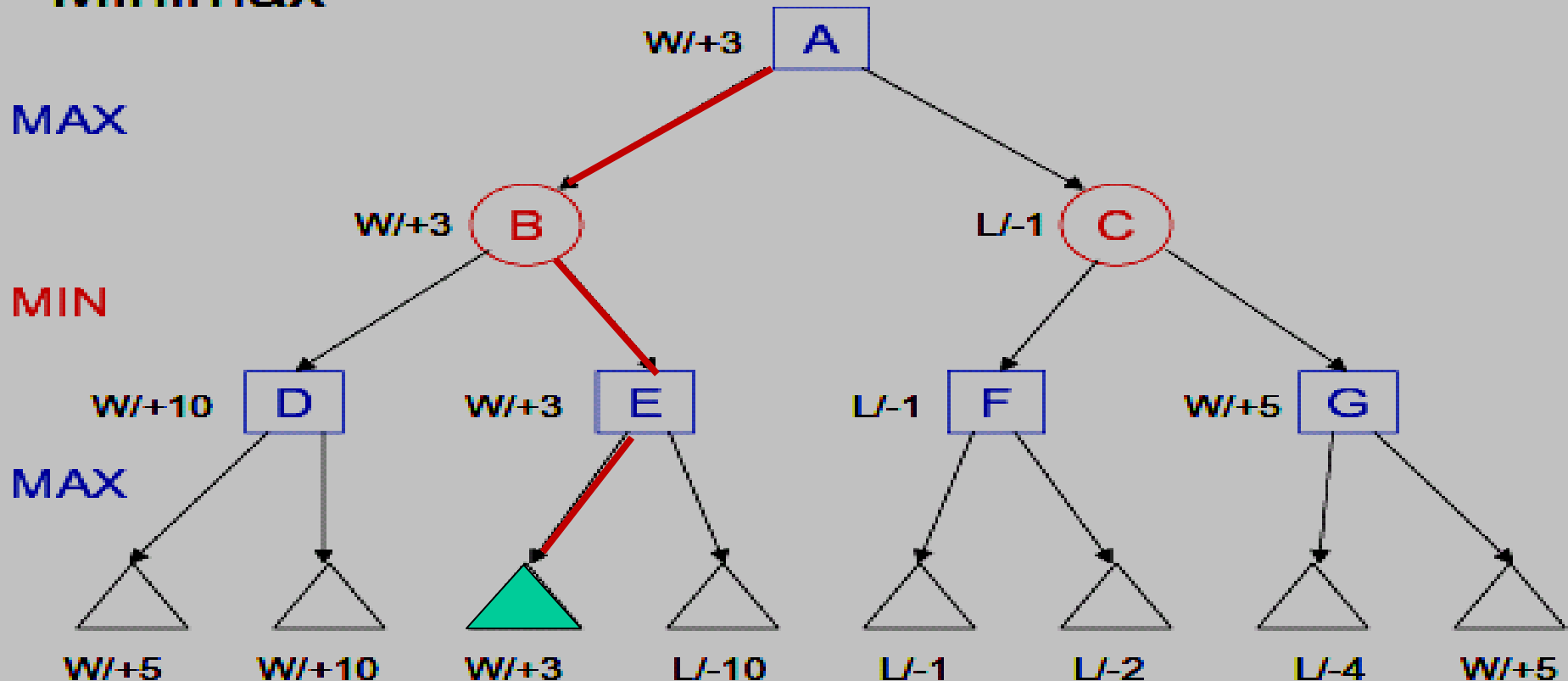
Złożoność $t \sim O(b^m)$, pamięć $O(bm)$ przy szukaniu w głąb.

Przykład mini-maxu

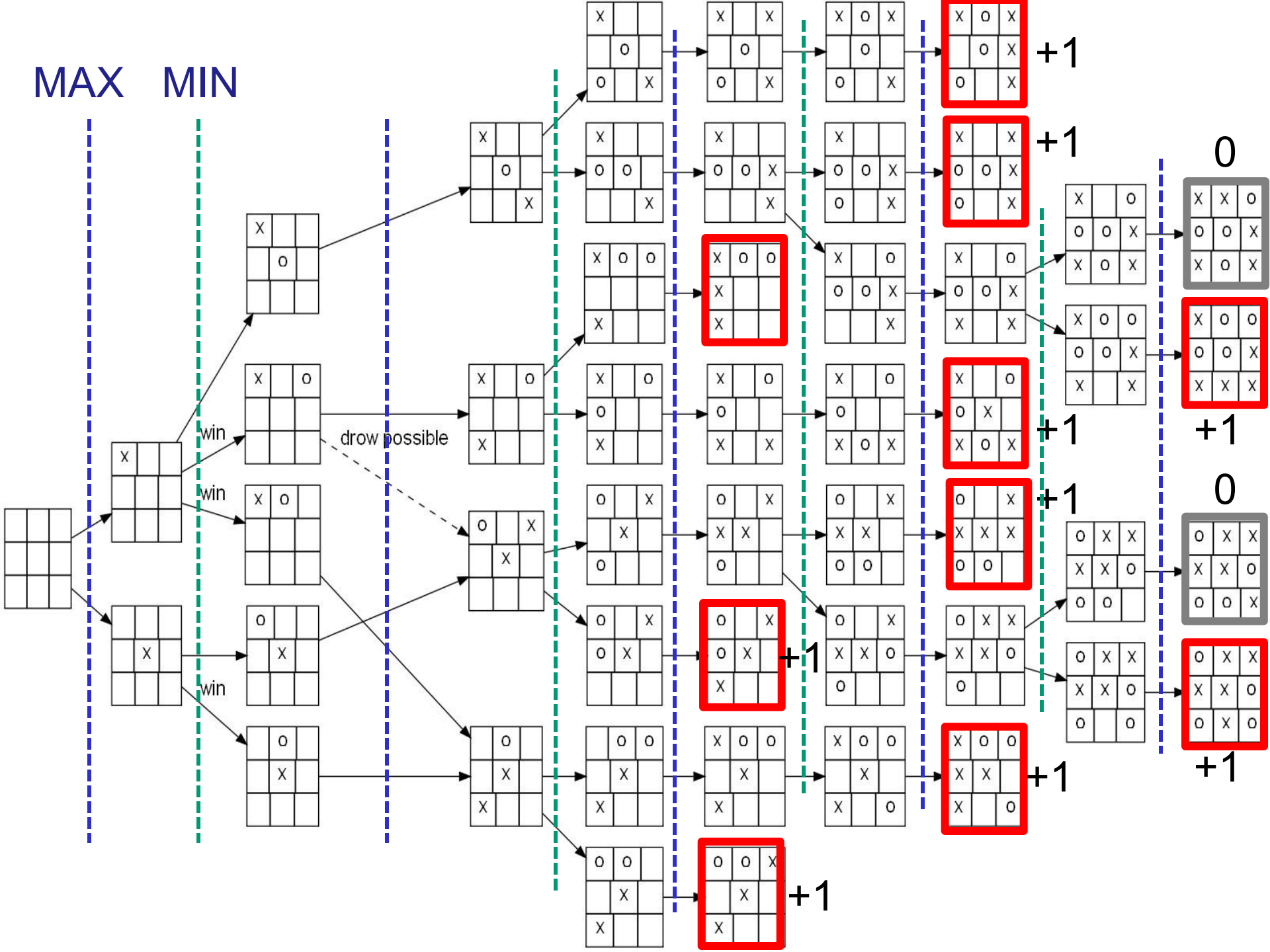
Którą drogę warto wybrać?

Oceniamy liście i cofamy się do góry przenosząc najwyższe lub najniższe oceny na węzły z ruchami dla MAX i MIN.

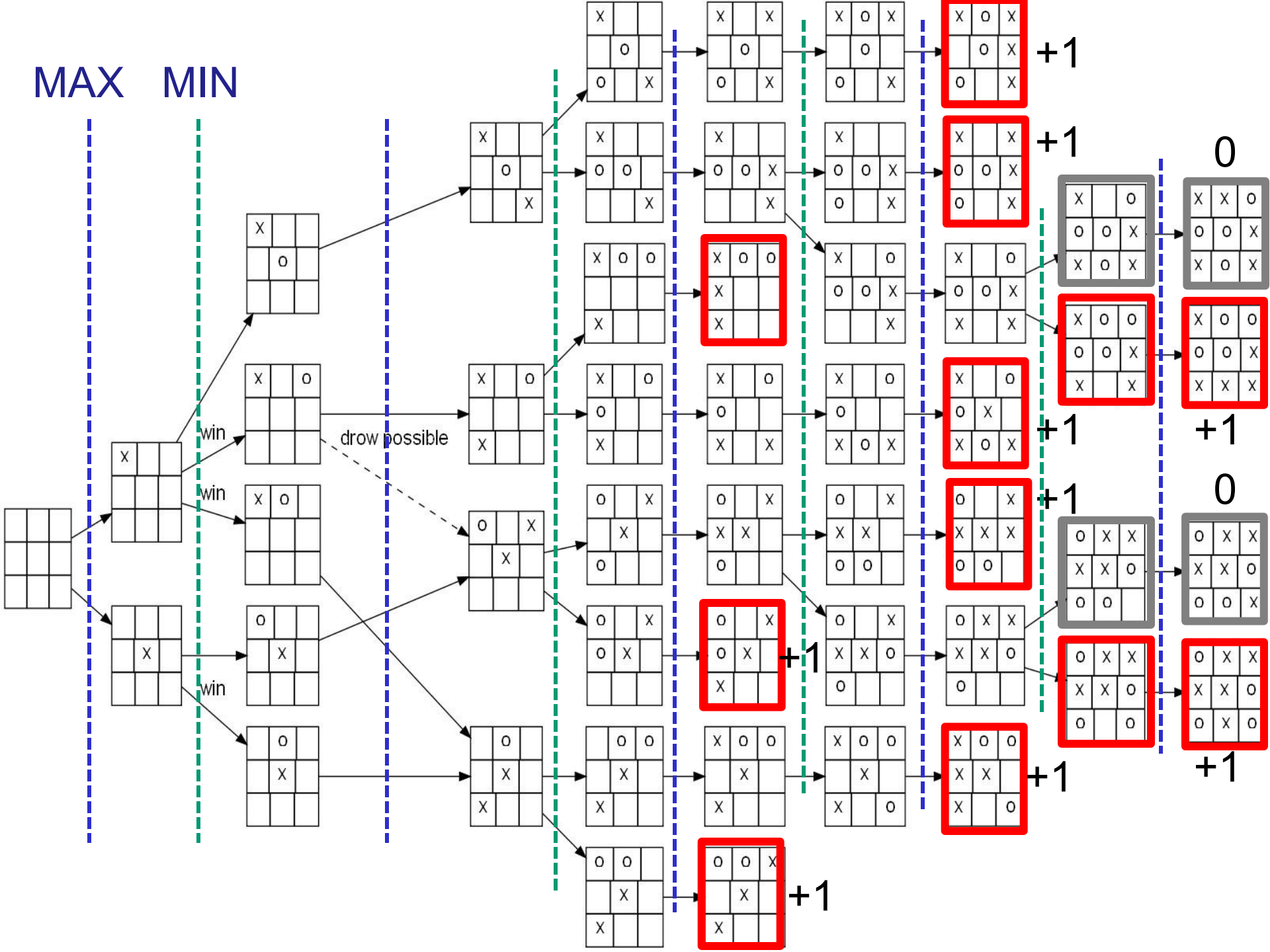
Minimax



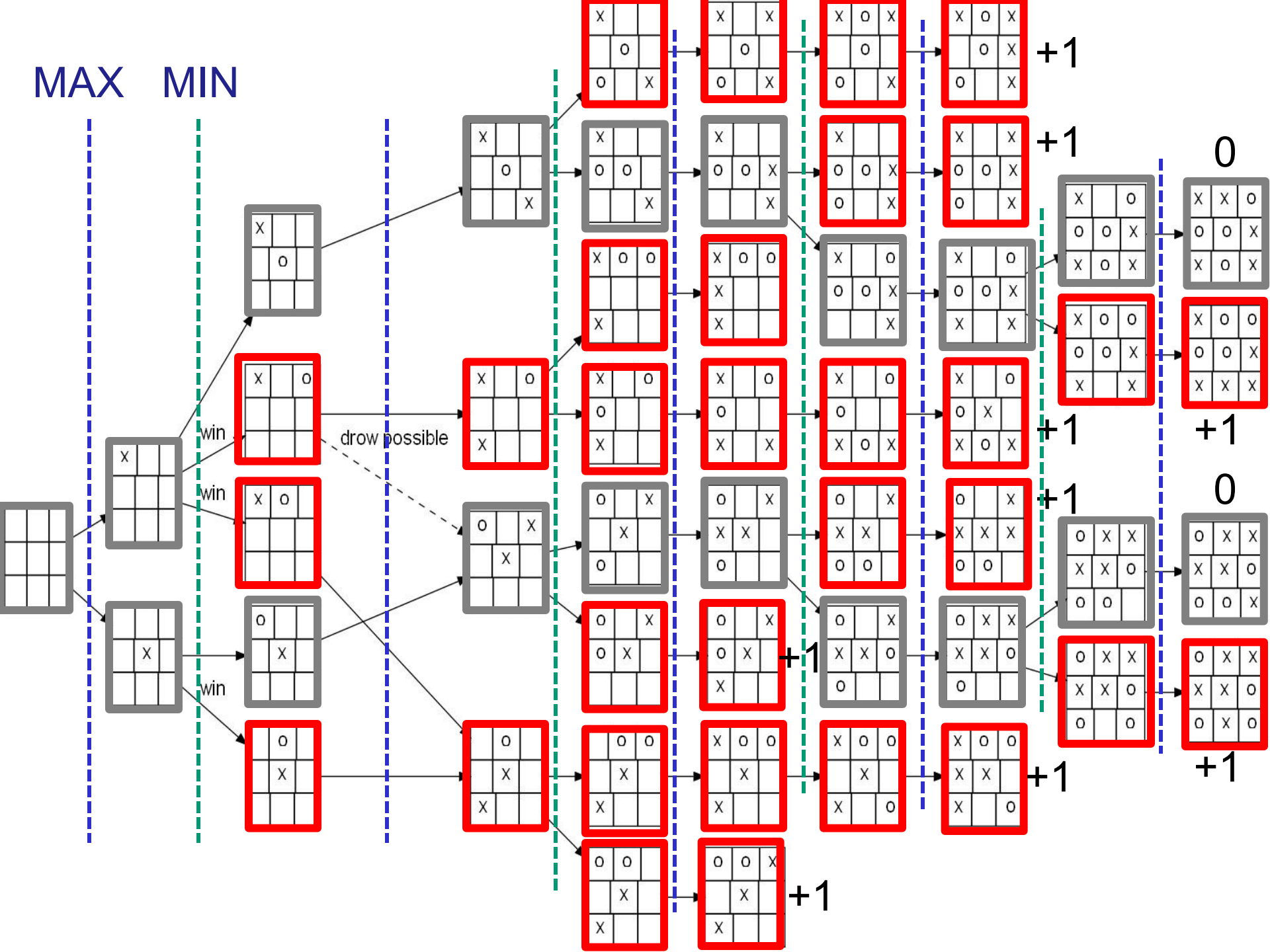
MAX MIN



MAX MIN



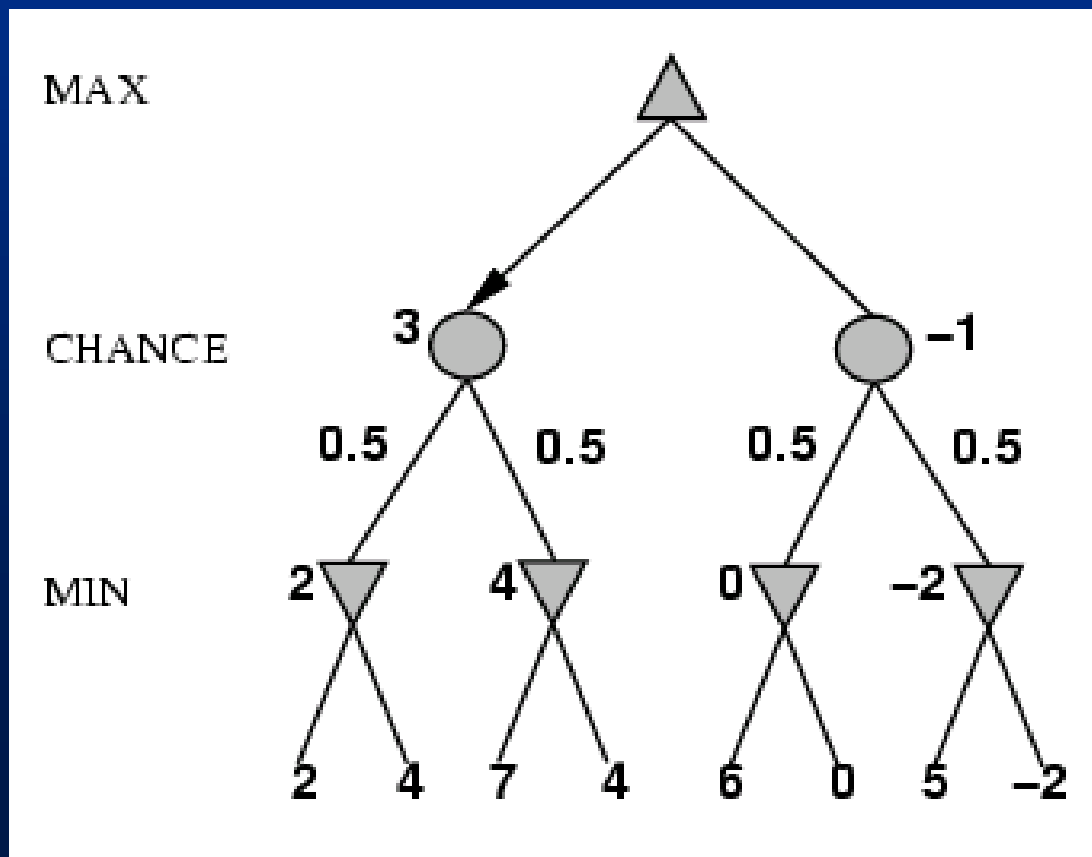
MAX MIN



Gry niedeterministyczne

Strategia min-max połączona z oceną probabilistyczną szans na generowanie kolejnego ruchu.

Obcinanie α - β można stosować, ale jest znacznie mniej efektywne, wzrasta liczba możliwych rozgałęzień.



Reprezentacja wiedzy i wnioskowanie

- Metody **reprezentacji wiedzy i automatycznego wnioskowania** są ważnym działem informatyki intensywnie obecnie rozwijanym.
- Dział ten, łącznie ze zbliżonymi tematycznie **metodami przetwarzania języka naturalnego** można zaliczyć też do dziedziny sztucznej inteligencji.
- **Logika pierwszego rzędu** zwana też **rachunkiem predykatów** jest językiem formalnym, w którym można przedstawić **opis pewnej rzeczywistości** (w postaci **faktów i reguł**) i przeprowadzać w nim **wnioskowanie**.
- Rachunek predykatów jest rozszerzeniem algebry Boole'a poprzez wprowadzenie **zmiennych i kwantyfikatorów**. Stworzony został na przełomie XIX i XX wieku – Ch. S. Peirce, G. Frege, B. Russel.

Wiedza

- „Wszyscy ludzie z natury **dążą do poznania**, czego dowodem jest ich umiłowanie zmysłów (bo, nawet niezależnie od ich praktycznej użyteczności, miłują je dla nich samych), a zwłaszcza ponad wszystkie inne **wzrok**.
- Nie tylko bowiem gdy działamy, ale nawet wtedy, gdy nie mamy niczego praktycznego na względzie, stawiamy wzrok ponad wszystkie inne zmysły.
- Przyczyną zaś jest to, że ze wszystkich zmysłów wzrok w najwyższym stopniu **umożliwia nam poznanie** i ujawnia wiele różnic”

Arystoteles "Metafizyka"



Wiedza

- W ujęciu „filozoficznym” za wiedzę uznaje się zbiór uzasadnionych przekonań.
- W ujęciu „naukowym” za wiedzę uznaje się zbiór uzasadnionych empirycznie lub logicznie/matematycznie stwierdzeń, które można poddawać falsyfikacji i krytyce (K. Popper).
- W życiu „potocznym” za wiedzę uznaje się zbiór doświadczeń i przekonań.
- Wie ten, kto umie klasyfikować. (Z. Pawlak)
- „Knowledge is experience” (A. Einstein)
- Wiedza, to warunek podejmowania skutecznych działań

Dane, informacja, wiedza

- 602 345 123 (ciąg symboli)
- Nr telefonu 602 345 123 (dane + interpretacja)
- Nr telefonu do Ewy 602 345 123 (informacje powiązane relacjami)

Reprezentacja wiedzy

- Główną siłą sprawczą wyznaczającą zakres i kierunek prac nad reprezentowaniem wiedzy jest to, **do czego owa reprezentacja ma być stosowana** oraz to, **w jaki sposób wiedza będzie pozyskiwana**.
- Nie istnieje zatem jedna, akceptowana przez wszystkich definicja terminu ***reprezentacja wiedzy***.
- „Reprezentowanie wiedzy polega na tworzeniu opisów świata lub jego stanów” R. Brachman, H. Levesque, 1985

Reprezentacja wiedzy

- Przez reprezentacje wiedzy rozumie się tu **sposób w jaki wiedza o świecie jest przedstawiana wraz z metodami przetwarzania, a zwłaszcza wnioskowania (inferencji).**

Reprezentacja wiedzy

- Przez reprezentacje wiedzy rozumie się tu **sposób w jaki wiedza o świecie jest przedstawiana wraz z metodami przetwarzania, a zwłaszcza wnioskowania (inferencji).**

Metody reprezentacja wiedzy

- język naturalny,
- metody stosowane w obszarze baz danych, np. UML
- logika matematyczna (klasyczna, niestandardowa),
- reguły produkcji (*production rules*),
- sieci semantyczne (*semantic networks*),
- grafy koncepcji (*concept graphs*),
- ontologie,
- ramy, scenariusze (*frames, scripts*),
- zbiory przybliżone (*rough sets*),
- XML
- sieci neuronowe (*neural nets*),
- algorytmy genetyczne (*genetic algorithms*) ...

Predykat

- **funktor zdaniotwórczy** od co najmniej jednego argumentu nazwowego;
- **funkcję zdaniową** argumentów nazwowych;
- **wyrażenie** opisujące pewne **własności** lub **relacje**.

Twr. Gödla zakończyło definitywnie setkę lat prób aksjomatyzowania całej matematyki, z twierdzenia wynika, że jest to zadanie niewykonalne. Ponadto matematyka nie jest i nie może być nauką zamkniętą i zakończoną. Nie istnieje program komputerowy, który zdoła rozstrzygnąć wszystkie problemy matematyczne. Istnieją konkretne problemy, których nie da się rozwiązać na żadnym komputerze.

Wyrażenia poprawnie zbudowane

- Prawidłowe wyrażenia rachunku predykatów nazywane są **wyrażeniami poprawnie zbudowanymi (wpz)**.
- Poprawne jest wyrażenie

$$p(f(X), Y))$$

gdzie **f** nazywa się **funktorem** lub **literą funkcyjną**.

- Wyrażenie otrzymane przez **kwantyfikację** wpz po pewnej zmiennej jest także wpz.
- Jeżeli **zmienna** w wpz została skwantyfikowana, to nazywa się ją **zmienną związaną**, a w przeciwnym wypadku **zmienną swobodną**.
- Wpzy, w których **nie ma zmiennych swobodnych**, nie są już predykatami, a reprezentują pewne **zdania twierdzące**. Takie wyrażenia nazywają się **zdaniami**.

Predykat jako funktor zdaniotwórczy

Wyrażenie:

pod(kot, stół)

może reprezentować zdanie: „Kot znajduje się pod stołem”

Predykat dwuargumentowy.

Predykat jako funktor zdaniotwórczy

od co najmniej jednego argumentu nazwowego.

Przykłady

Zdanie: „Istnieje osoba, która napisała „Pana Cogito’ ”

(Zbigniew Herbert, 1974)

(Cogito ergo sum - Kartezjusz)

może być reprezentowane przez wyrażenie:

$$(\exists X) \textit{napisal}(X, \textit{„Pan Cogito”})$$

3. Wnioskowanie

Wnioskowaniem nazywamy proces stosujący *reguły wnioskowania* dla uzyskania **wpz** z zadanego zbioru wpz.

Wpz otrzymane drogą wnioskowania nazywa się *wnioskiem*, a ciąg zastosowanych *reguł wnioskowania* tworzy dowód.

Wyrażenie

$$S \vdash W$$

oznacza, że wpz **W** jest wnioskiem ze zbioru $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$.

Reguły wnioskowania

Wnioskowanie jest procesem wielokrokovym, gdzie w każdym kroku stosowana jest odpowiednio dobrana *reguła wnioskowania*.

Reguła wnioskowania składa się ze:

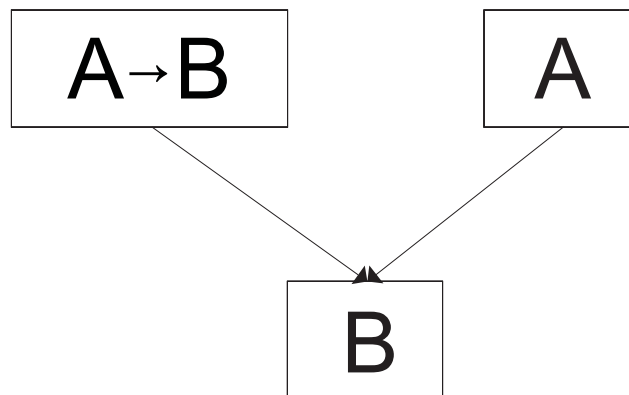
- a) zbioru wyrażeń nazywanych *warunkami*
- b) zbioru wyrażeń nazywanych *konkluzjami*.

W ten sposób stosując reguły wnioskowania z wpz i zbiorów wpz otrzymujemy nowe wpz, aż do uzyskania *wymaganego wyrażenia*.

Reguły wnioskowania

reguła odrywania (modus ponens)

ze zdania (reguły) *jeżeli* A *to* B , i zdania (faktu) A ,
wynika **konkluzja (fakt)** B .



If today is Wednesday, then I will go to AI lecture.

Today is Wednesday.

Therefore, I will go to AI lecture.

Modus ponens jest nazywany wnioskowanie w przód.

uniwersalna specjalizacja :

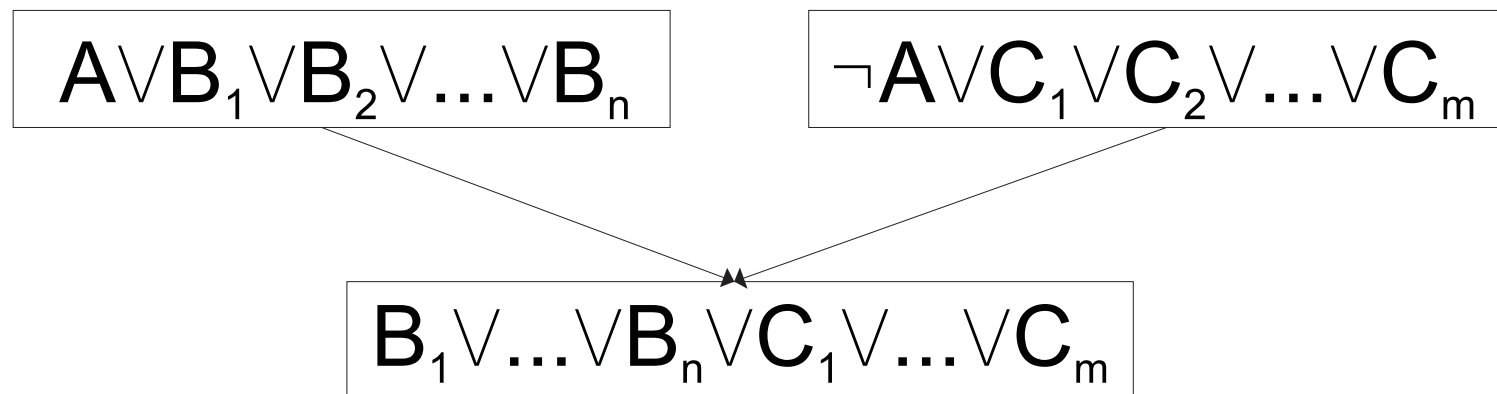
wytwarza wpz $W(a)$ z wpz $(\forall X)W(X)$.

reguła rezolucji ze zdania A lub B

i zdania $\text{nie } A$ lub C wynika zdanie B lub C .

Reguła *rezolucji* zawiera, jako szczególne przypadki, inne reguły wnioskowania.

Rezolucja to metoda automatycznego dowodzenia twierdzeń oparta na generowaniu nowych klauzul aż dojdzie się do sprzeczności. W ten sposób można udowodnić, że dane twierdzenie nie jest spełnialne, lub też, co jest równoważne, że jego zaprzeczenie jest tautologią.



Rezolucja dwóch klauzul

Dane są dwie klauzule

$$L = \bigvee_i l_i, \quad M = \bigvee_i m_i$$

gdzie l_i i m_i są literałami. Niech

$$l_j \subseteq \{l_i\}, \quad m_k \subseteq \{m_i\}$$

Jeżeli istnieje unifikator S dla l_j i $\neg m_k$, to klauzule L i M mają **rezolwentę** (wynik wnioskowania m. rezolucji)

$$\left\{ \bigvee_{i \neq j} l_i \right\}_S \vee \left\{ \bigvee_{i \neq k} m_i \right\}_S$$

Rezolucja dwóch klauzul

Przykład Stosując podstawienie

$$S = \{X/Z, a/X\}$$

dwie klauzule

$$P(X, f(a)) \vee P(X, f(Y)) \vee \neg Q(Y), \quad \neg P(Z, f(Z)) \vee R(Z)$$




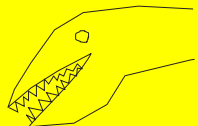










zostają przekształcone do postaci

$$P(a, f(a)) \vee P(a, f(Y)) \vee \neg Q(Y), \quad \neg P(a, f(a)) \vee R(a)$$

i ich rezolwenta wynosi

$$P(a, f(Y)) \vee \neg Q(Y) \vee R(a),$$

Świat smoka (wumpus world)

4	 ZAPACH		 WIATR	 DZIURA
3		 ZAPACH  WIATR ZŁOTO	 DZIURA	 WIATR
2	 ZAPACH		 WIATR	
1	 START	 WIATR	 DZIURA	 WIATR
	1	2	3	4

Przykład świata smoka

Świat smoka (wumpus world)

Podczas działania systemu agent odbiera następujące sygnały, podejmuje następujące akcje i ma następujące cele:

- W kwadracie zawierającym smoka i w kwadratach przylegających bokami agent czuje *zapach*.

Świat smoka (wumpus world)

Podczas działania systemu agent odbiera następujące sygnały, podejmuje następujące akcje i ma następujące cele:

- W kwadracie zawierającym smoka i w kwadratach przylegających bokami agent czuje *zapach*.
- W kwadratach przylegających bokami do dziury agent czuje powiew wiatru.

Świat smoka (wumpus world)

Podczas działania systemu agent odbiera następujące sygnały, podejmuje następujące akcje i ma następujące cele:

- W kwadracie zawierającym smoka i w kwadratach przylegających bokami agent czuje *zapach*.
- W kwadratach przylegających bokami do dziury agent czuje powiew wiatru.
- W kwadracie zawierającym złoto agent zauważa blask.

Świat smoka (wumpus world)

Podczas działania systemu agent odbiera następujące sygnały, podejmuje następujące akcje i ma następujące cele:

- W kwadracie zawierającym smoka i w kwadratach przylegających bokami agent czuje *zapach*.
- W kwadratach przylegających bokami do dziury agent czuje powiew wiatru.
- W kwadracie zawierającym złoto agent zauważa blask.
- Gdy agent usiłuje przejść przez ścianę ograniczającą system, to czuje uderzenie.

Świat smoka (wumpus world)

Podczas działania systemu agent odbiera następujące sygnały, podejmuje następujące akcje i ma następujące cele:

- W kwadracie zawierającym smoka i w kwadratach przylegających bokami agent czuje *zapach*.
- W kwadratach przylegających bokami do dziury agent czuje powiew wiatru.
- W kwadracie zawierającym złoto agent zauważa blask.
- Gdy agent usiłuje przejść przez ścianę ograniczającą system, to czuje uderzenie.
- Gdy smok zostaje zabity, to wydaje przenikliwy dźwięk, który jest słyszalny w każdym kwadracie

Świat smoka (wumpus world)

- Agent odbiera docierające do niego sygnały w postaci list pięciu symboli. Na przykład, jeżeli jest zapach i wiatr ale nie ma blasku, uderzenia i przenikliwego dźwięku, agent otrzyma listę: [*Zapach, Wiatr, Nic, Nic, Nic*]. Agent nie postrzega swojego położenia.

Świat smoka (wumpus world)

- Agent odbiera docierające do niego sygnały w postaci list pięciu symboli. Na przykład, jeżeli jest zapach i wiatr ale nie ma blasku, uderzenia i przenikliwego dźwięku, agent otrzyma listę: [*Zapach, Wiatr, Nic, Nic, Nic*]. Agent nie postrzega swojego położenia.
- Agent może podjąć następujące akcje: przesunięcie się o jeden kwadrat do przodu, obrót w prawo o 90^0 , obrót w lewo o 90^0 , chwycenie obiektu znajdującego się w tym samym kwadracie, w którym znajduje się agent. Ponadto agent może wystrzelić strzałę, która leci wzdłuż linii prostej i albo traf i zabije smoka, albo uderzy w ścianę. Agent ma tylko jedną strzałę, więc tylko jedna akcja strzału może mieć jakiś skutek.

Świat smoka (wumpus world)

- Agent może podjąć akcje wyjścia z jaskini; co może być zrealizowane, gdy agent znajduje się w kwadracie $[1, 1]$.

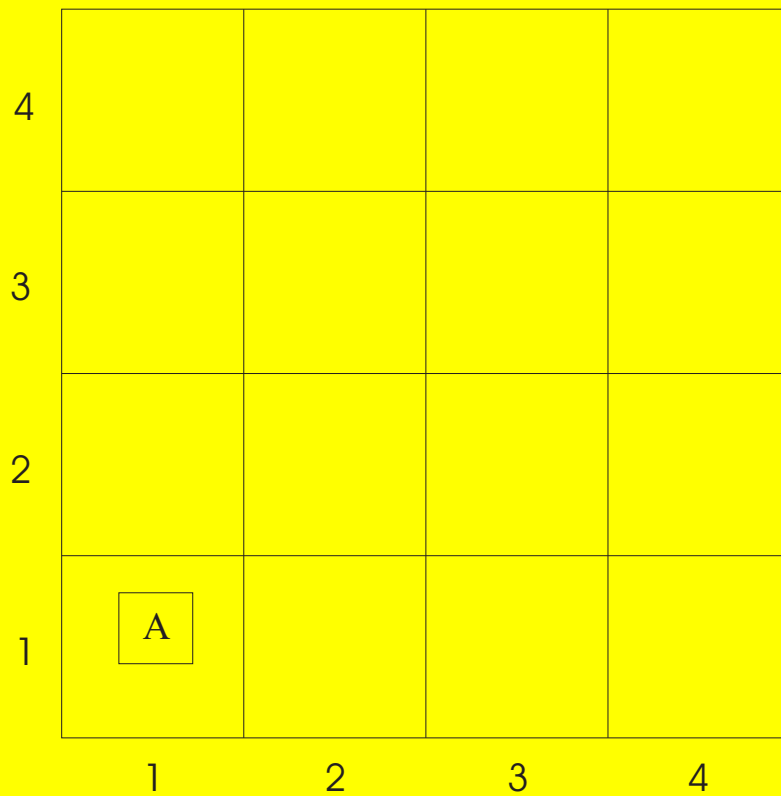
Świat smoka (wumpus world)

- Agent może podjąć akcje wyjścia z jaskini; co może być zrealizowane, gdy agent znajduje się w kwadracie $[1, 1]$.
- Agent ginie jeżeli wejdzie do kratki zawierającej dziurę lub żywego smoka.

Świat smoka (wumpus world)

- Agent może podjąć akcje wyjścia z jaskini; co może być zrealizowane, gdy agent znajduje się w kwadracie $[1, 1]$.
- Agent ginie jeżeli wejdzie do kratki zawierającej dziurę lub żywego smoka.
- Celem agenta jest znalezienie złota i wyniesienie go z jaskini tak szybko jak to jest możliwe. W jednorazowej próbie, za wyniesienie złota z jaskini przyznane zostaje 1000 punktów, jedna podjęta akcja kosztuje 1 punkt zaś utrata życia przez agenta kosztuje 10000 punktów.

Wnioskowanie w świecie smoka



Wnioskowanie w świecie smoka

4				
3				
2				
1	A			
	1	2	3	4

4				
3				
2	OK			
1	A OK	OK		
	1	2	3	4

Wnioskowanie w świecie smoka

4				
3				
2	OK			
1	O OK	A W OK		
	1	2	3	4

Wnioskowanie w świecie smoka

4				
3				
2	OK			
1	O OK	A W OK		
	1	2	3	4

4				
3				
2	OK	D?		
1	O OK	A W OK	D?	
	1	2	3	4

Wnioskowanie w świecie smoka

4				
3				
2	<div>A</div> Z OK	D?		
1	O OK	W O OK	D?	
	1	2	3	4

4				
3				
2	A Z OK	D?		
1	O OK	W O OK	D?	
	1	2	3	4

4				
3	S			
2	A Z OK	OK		
1	O OK	W O OK	D	
	1	2	3	4

Wnioskowanie w świecie smoka

„Zapach występuje w kwadracie wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej w jednym sąsiednim kwadracie znajduje się smok“ Na podstawie tego zdania mamy

$$\begin{aligned} &(\forall X, Y)[ws(X, Y) \wedge z(X, Y)] \equiv \\ &\equiv (\exists X_s, Y_s)[ws(X_s, Y_s) \wedge ks(X, Y, X_s, Y_s) \wedge s(X_s, Y_s)] \end{aligned}$$

gdzie predykaty ws , z , ks i s określają odpowiednio znajdowanie się w systemie, zapach, kwadrat sąsiedni i obecność smoka.

Wnioskowanie w świecie smoka

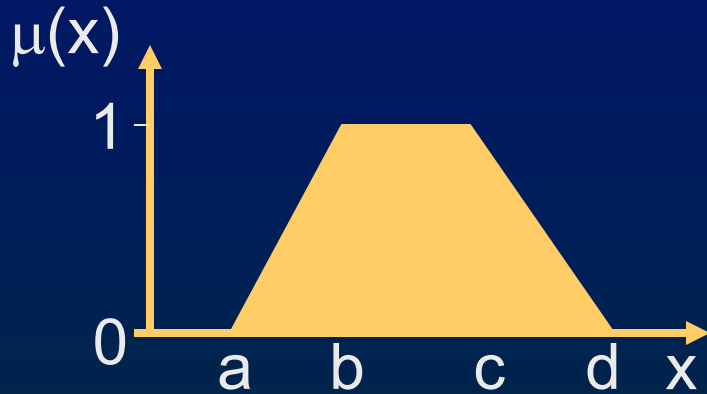
Nie sprawdzając znajdowania się współrzędnych wewnątrz systemu, oraz zapisując sąsiedztwo w jawny sposób i nie pisać jawnie kwantyfikatorów można na podstawie powyższego wyrażenia napisać dwie równoważne reguły:

$$\neg z(X, Y) \rightarrow \neg s(X, Y) \wedge \neg s(X-1, Y) \wedge \neg s(X+1, Y) \wedge \neg s(X, Y-1) \wedge \neg s(X, Y+1)$$

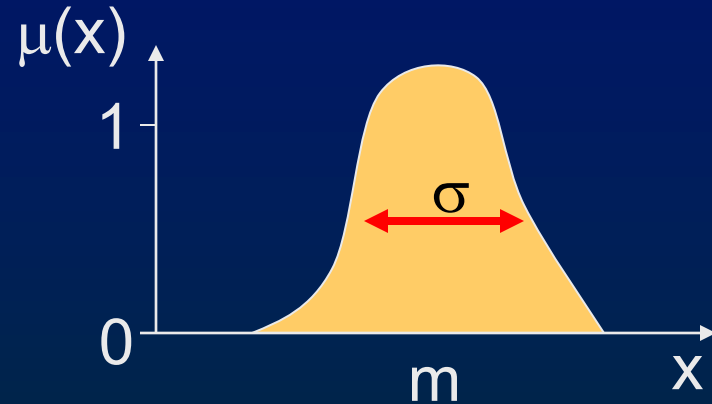
$$z(X, Y) \rightarrow s(X, Y) \vee s(X-1, Y) \vee s(X+1, Y) \vee s(X, Y-1) \vee s(X, Y+1)$$

Typy funkcji przynależności

Trapezoid: $\langle a, b, c, d \rangle$



Gaus/Bell: $N(m, s)$



$$Trap(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{d-x}{d-c}, 1\right), 0\right)$$

$$G(x; a) = e^{-(x-a)^2 / 2\sigma^2}$$

$$B(x; a, b) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-a}{b}\right|^{2b}}$$

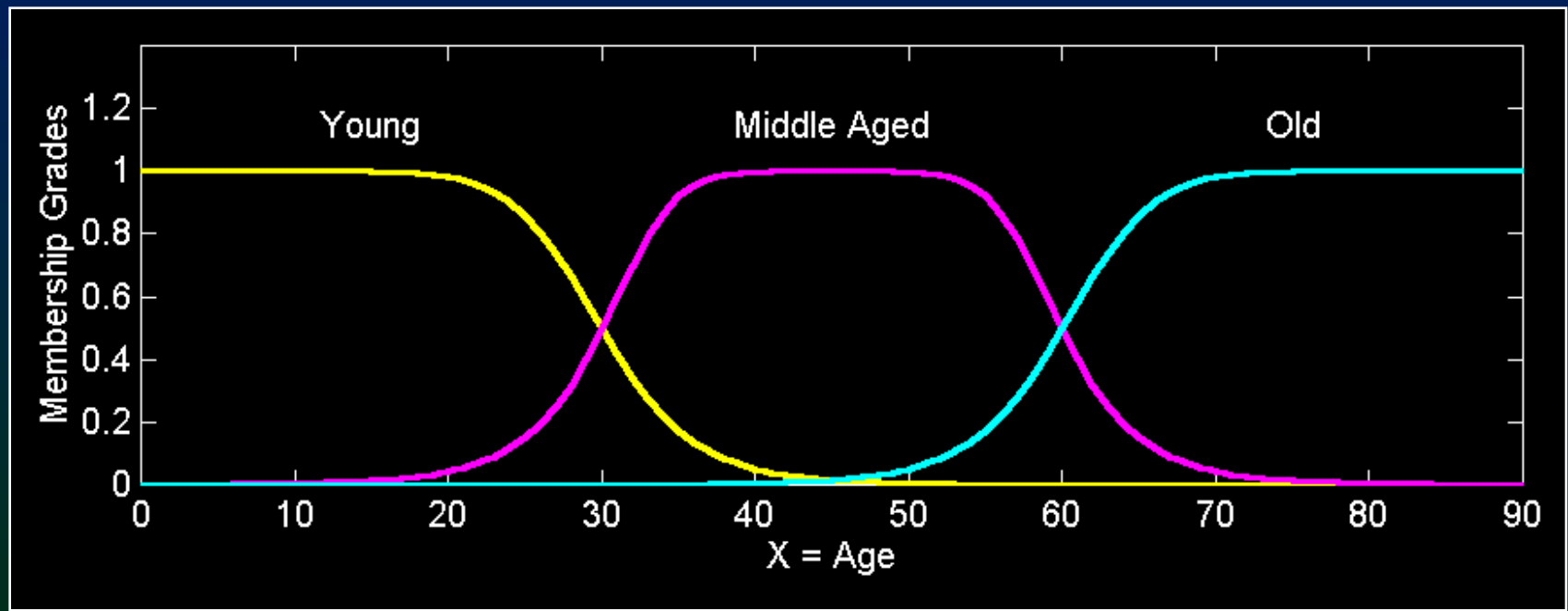
Zmienne lingwistyczne

$W=20 \Rightarrow$ Wiek=młody.

Zmienna lingwistyczna = wartość lingwistyczna.

Zmienna lingwistyczna: temperatura

termy (zbiory rozmyte) : { zimno, ciepło, gorąco }



Liczby rozmyte

Zazwyczaj wypukłe, unimodalne (jedno maksimum).
FP często się nakrywają.

Liczby: jądro = punkt, $\exists_x \mu(x)=1$

Monotonicznie maleją po obu stronach jądra.

Typowy wybór: **funkcje trójkątne** (a,b,c) lub **singletony**.

$$7_F = \left\{ \frac{1/3}{5} + \frac{2/3}{6} + \frac{1}{7} + \frac{2/3}{8} + \frac{1/3}{9} \right\}$$

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i$$

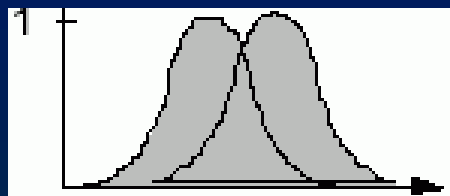
$$A = \int_X \mu_A(x) / x$$

Suma i iloczyn zbiorów

Niech A, B - zbiory rozmyte.

Suma $A \cup B$ to zbiór o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$



max można zastąpić dowolną S-normą $S(a,b)$ która dla obu argumentów jest niemalejąca, przemienna, łączna i $S(a,0)=a$, $S(a,1)=1$.

Iloczyn $A \cap B$ to zbiór o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

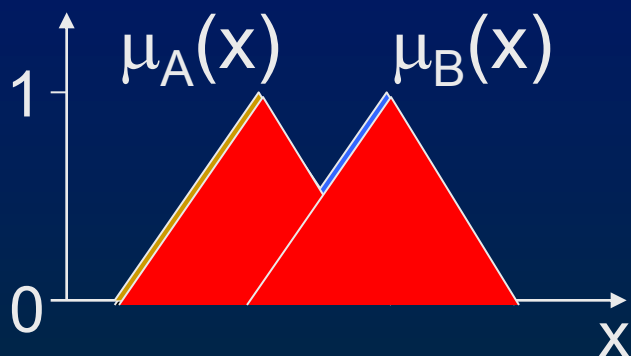


min można zastąpić dowolną T-normą $T(a,b)$ która dla obu argumentów jest nierosnąca, przemienna, łączna i $T(a,0)=0$, $T(a,1)=a$.

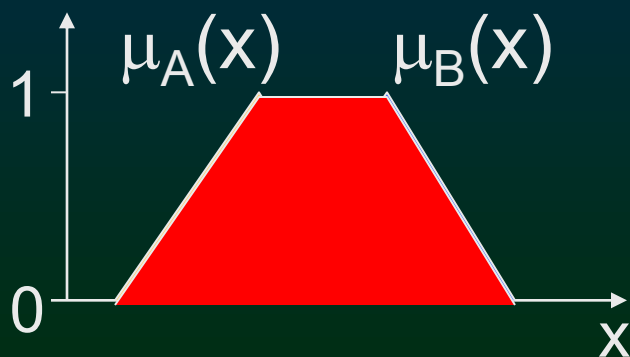
Przykłady

Suma

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

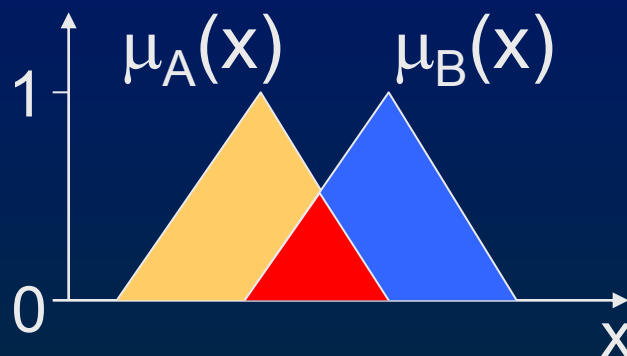


$$\mu_{A \vee B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$

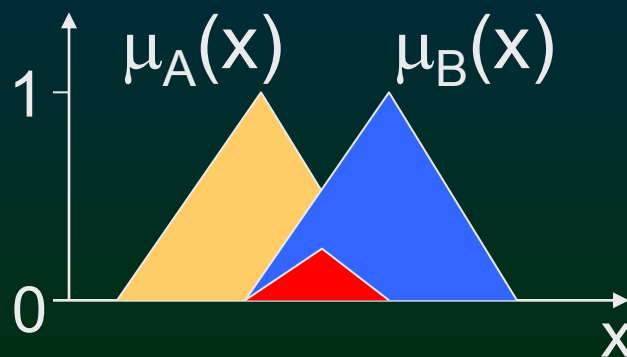


Iloczyn

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



$$\mu_{A \wedge B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$



Operacje na zm. lingwistycznych

Koncentracja: $\text{Con}(A) = A^2$

Spłaszczenie: $\text{Dil}(A) = A^{0.5}$

Intensyfikacja kontrastu:

$$\text{INT}(A) = \begin{cases} 2A^2, & 0 \leq \mu_A(x) \leq 0.5 \\ -2(\neg A)^2, & 0.5 \leq \mu_A(x) \leq 1 \end{cases}$$

